CINEMATIQUE

1. INTRODUCTION

2. NOTIONS IMPORTANTES
2.1 MOBILE PONCTUEL
2.2 POSITION
2.3 SYSTEME DE REFERENCE OU REFERENTIEL
2.4 TRAJECTOIRE D'UN MOBILE
2.5 ABSCISSE CURVILIGNE
2.6 SYSTEMES DE COORDONNES
2.6.1 DEFINITION
2.6.2 COORDONNEES CARTESIENNES
2.6.3 COORDONNEES CURVILIGNES

3. VITESSE DU POINT MATERIEL
3.1 VITESSE MOYENNE
3.2 VITESSE INSTANTANEE

4. ACCELERATION DU POINT MATERIEL
4.1 ACCELERATION MOYENNE
4.2 ACCELERATION INSTANTANEE

5. TRIEDRE DE FRENET

6. TYPES DE MOUVEMENT
6.1 MOUVEMENT RECTILIGNE
6.2 MOUVEMENT CIRCULAIRE
6.3 MOUVEMENT HELICOIDAL
6.4 MOUVEMENT A ACCELERATION CENTRALE
6.4.1 LOI DES AIRES
6.4.2 FORMULES DE BINET
6.5 CHANGEMENT DE REPERE
6.5.1 POINT COINCIDANT
6.5.2 COMPOSITION DES VITESSES
6.5.3 DERIVATION CINEMATIQUE
6.5.4 COMPOSITION DES ACCELERATIONS



CINEMATIQUE

1) INTRODUCTION

La ***mécanique*** est la partie de la physique qui permet de décrire et de comprendre les mouvements des corps matériels. Dans la mécanique, on peut distinguer trois grandes parties : la cinématique, la dynamique et la statique.
La ***cinématique*** est la partie de la mécanique qui décrit les mouvements sans envisager les causes, les circonstances et les effets de ces mouvements.
La ***dynamique*** est la partie de la mécanique qui cherche à expliquer les causes des mouvements.
La ***statique*** est la partie de la mécanique qui étudie les situations caractérisées par l'absence de mouvement. (Etude des corps en équilibre)

2) NOTIONS IMPORTANTES

2.1) MOBILE PONCTUEL

Un mobile est un corps qui peut être mis en mouvement
Un ***mobile ponctuel*** est un mobile fictif dont les dimensions sont ramenées à celles d'un point dans le but d'en simplifier l'étude du mouvement. Ainsi si on étude le mouvement d'une voiture se déplaçant sur une route, sur notre feuille on le représentera par un point qui se déplace. La voiture est donc réduite à son centre de gravité contenant sa masse m.



2.2) POSITION

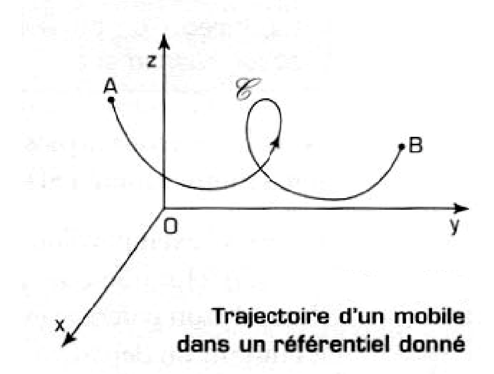
En mécanique, la première chose à faire est de pouvoir situer un point dans l'espace afin de caractériser son état de repos ou son état de mouvement.
La position d'un corps est ce qui permet de le situer dans l'espace. Elle est donnée par ses *<u>coordonnées</u>* (x,y,z) dans un système de référence.

2.3) SYSTÈME DE RÉFÉRENCE OU RÉFÉRENTIEL

Un système de référence est un ensemble de trois axes sécants non coplanaires d'origine *O* qui permet de caractériser les positions d'un corps.

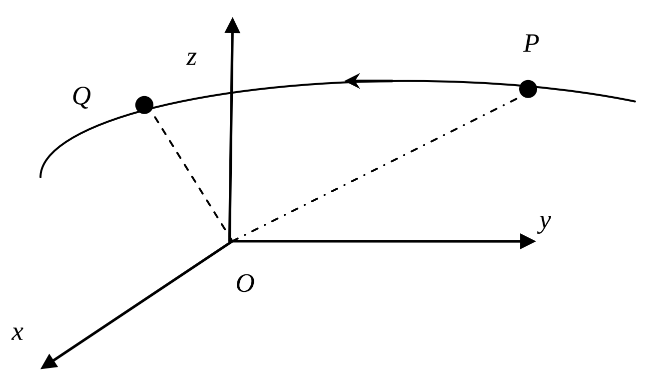
2.4) TRAJECTOIRE D'UN MOBILE

La trajectoire est l'ensemble des positions occupées par le corps au cours du temps.



2.5) ABSCISSE CURVILIGNE

Soit *P* la position du point *M* à l'instant t_0, *Q* sa position à un instant t_1 quelconque ($t_1>t_0$), la mesure algébrique de l'arc *PQ* est appelée abscisse curviligne du point *M* noté $s(t) = \overset{\frown}{PQ}$.
s(t) est par définition l'équation horaire du mouvement.



2.6) SYSTEMES DE COORDONNES

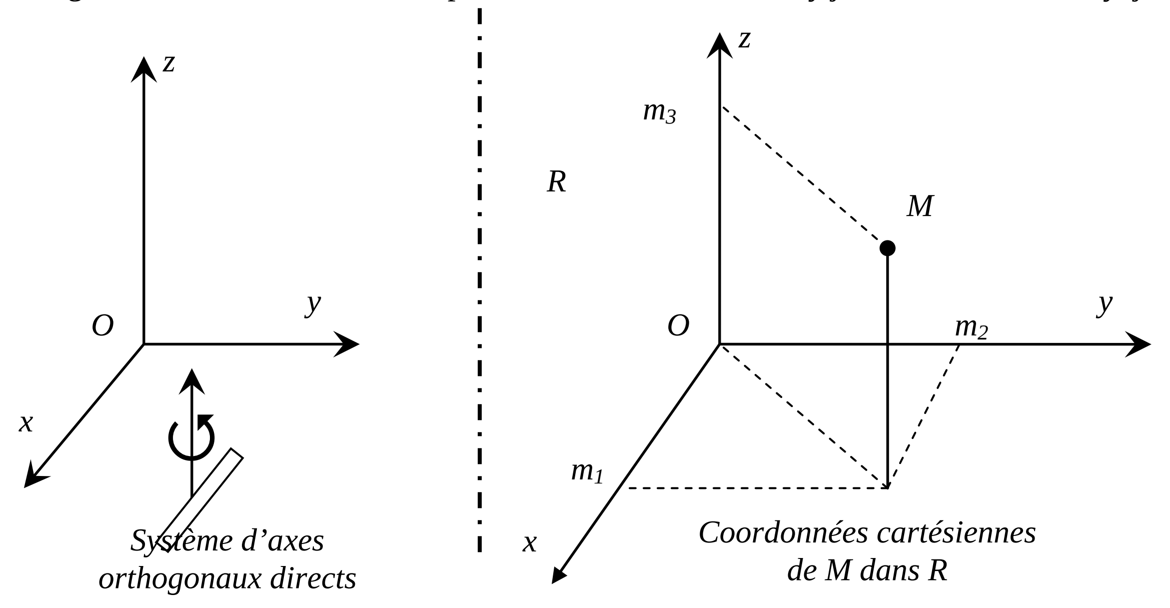
2.6.1) DEFINITION

On appelle systèmes de coordonnées à l'instant *t* toute paramétrisation des points *M* du référentiel au moyen de trois réels (m_1,m_2,m_3). Le déplacement élémentaire est noté $\overrightarrow{dl}$ ou $\overrightarrow{dr}$, ses composantes dépendent des systèmes de coordonnées

2.6.2) COORDONNEES CARTESIENNES

Considérons un système d'axes cartésiens direct $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, défini par un point *O* appelé origine et trois axes orthogonaux, orienté de façon directe, c'est-à-dire satisfaisant la règle du tire-bouchon suivante : la rotation de π/2 amenant l'axe $\vec{i}$ sur l'axe $\vec{j}$ fait avancer le tire-bouchon

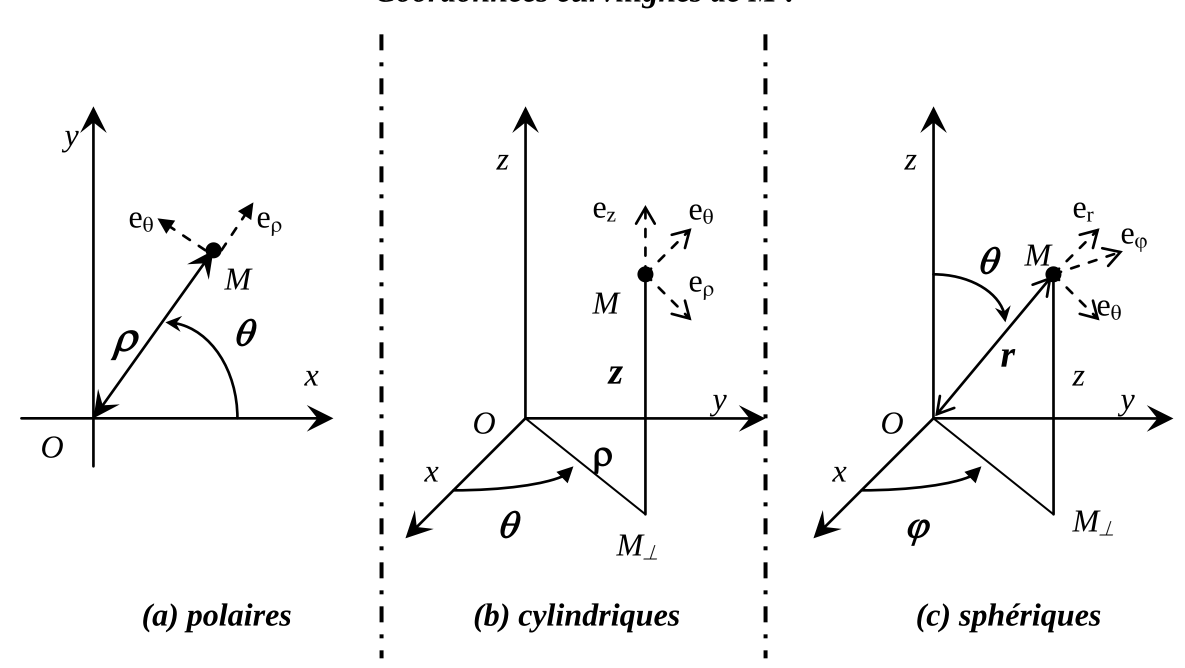
dans la direction $\vec{k}$. Nous pouvons repérer un point *M* de *R* par ses coordonnées cartésiennes ($m_1=x, m_2=y, m_3=z$), où m_i est la longueur avec le signe approprié du segment OM_i, projection orthogonale de *OM* sur l'axe *i*. On peut donc écrire $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$



2.6.3) COORDONNEES CURVILIGNES

Suivant la nature du problème, en particulier quand il y a des symétries, il sera possible de simplifier les calculs en introduisant d'autres systèmes de coordonnées, dites coordonnées curvilignes. Les coordonnées curvilignes le plus souvent utilisées sont les coordonnées polaires (dans le plan), cylindriques et sphériques, définies sur la figure ci-dessous :

Coordonnées curvilignes de M :



$$\rho = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \in [0,\infty[\qquad \theta \in [0,2\pi[\qquad M=(\rho,\theta),\quad \overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} \qquad \overrightarrow{dl} = d\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho\, d\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}$$

(<u>*Coordonnées Polaires*</u>)

(<u>*Coordonnées Cylindriques*</u>)

$$\rho = \left\|\overrightarrow{OM_\perp}\right\| \in [0,\infty[\qquad \theta \in [0,2\pi[\qquad M=(\rho,\theta,z),\ \overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z} \qquad \overrightarrow{dl} = d\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho\, d\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + dz\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \in [0,\infty[\qquad \theta \in [0,\pi[,\ \varphi \in [0,2\pi[\qquad M=(r,\theta,\varphi),\quad \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} \qquad \overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{e_r} + r\,d\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

(<u>*Coordonées Sphériques*</u>)

Ces formules exprimant les coordonnées cartésiens en fonctions des coordonnées (m_1,m_2,m_3) définissent le changement de coordonnées.

Les repères $(M,\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})$ cylindrique et $(M,\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi})$ sphérique se déplacent avec le point *M*.

3) VITESSE DU POINT MATERIEL

3.1) VITESSE MOYENNE

A l'instant *t* le point matériel est en *M*, et à l'instant t' en M', il a parcouru la distance MM' pendant le temps $t'-t$. Sa vitesse moyenne est égale à :

$$\overrightarrow{V_m} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t},\ (\mathbf{m/s})$$

3.2) VITESSE INSTANTANEE

Si le temps $t'-t$ tend vers zéro, le point M' se rapproche du point *M* et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sera porté par la tangente à la trajectoire au point *M*. Le vecteur vitesse tend alors vers la vitesse instantanée au point *M* à l'instant *t*.

$$\overrightarrow{V_R}(M) = \lim_{M'\to M} \overrightarrow{V_m} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$



4) ACCELERATION DU POINT MATERIEL

4.1) ACCELERATION MOYENNE

Soient $\overrightarrow{V_R^1}(M)$ et $\overrightarrow{V_R^2}(M)$ les vecteurs vitesses du point matériel *M* aux instants t_1 et t_2. On définit le vecteur accélération moyenne du point *M* entre t_1 et t_2 comme étant le vecteur

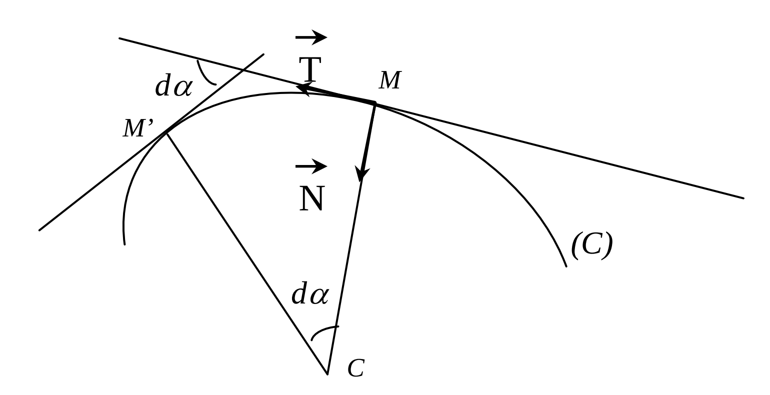
$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{V_R^2} - \overrightarrow{V_R^1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}, \ (\boldsymbol{m/s^2})$$

4.2) ACCELERATION INSTANTANEE

On appelle vecteur accélération du point matériel *M* dans son mouvement par rapport à *R*, la limite du vecteur accélération moyenne quand t_2 tend vers t_1

$$\overrightarrow{a_R}(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_R}(M)}{dt}\right|_R$$

5) TRIEDRE DE FRENET



On considère une courbe (*C)* et un point *M(s)* de (*C)* repéré par son abscisse curviligne *s*. On générale on associe à la courbe *(C)* le trièdre de Frenet attaché au point M et constitué par trois vecteurs unitaires, à savoir :

$\vec{T}$ porté par la tangente

$\vec{N}$ porté par la normale principale ($\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont contenus dans le même plan)

$\vec{B}$ directement perpendiculaire à $\vec{T}$ et à $\vec{N}$: $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$

VECTEUR VITESSE DANS LE TRIEDRE DE FRENET

$$\overrightarrow{V_R}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\|\vec{T} = V\vec{T}$$

Or $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}\frac{ds}{dt}$ et $\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\| = \frac{ds}{dt}$, on en déduit que $\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$

COURBURE γ ET RAYON DE COURBURE R

Le vecteur $\vec{N}$ est tel que $(\vec{T}, \vec{N})$ forme une base orthonormal directe.

$$\left\|\vec{T}\right\|^2 = 1 \Rightarrow 2\vec{T}\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

par conséquent le vecteur $\vec{N}$ est colinéaire au vecteur $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$

On définit alors la *courbure* γ et le *rayon de courbure R*, par les nombres réels définis par :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N} = \frac{1}{R}\vec{N}$$

VECTEUR ACCELERATION DANS LE TRIEDRE DE FRENET

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_R}(M) &= \frac{d}{dt}(V\vec{T}) = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{dt}\\ &= \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V^2\frac{d\vec{T}}{ds}\\ &= \frac{dV}{dt}\vec{T} + \frac{V^2}{R}\vec{N}\end{aligned}$$

D'où le vecteur accélération tangentielle : $\overrightarrow{a_t} = \dfrac{dV}{dt}\vec{T}$

et le vecteur accélération normale : $\overrightarrow{a_n} = \dfrac{V^2}{R}\vec{N}$

N.B : En calculant le produit vectoriel entre la vitesse et l'accélération on peut trouver une formule très utile pour la détermination du rayon de courbure *R*

$$R = \frac{V^3}{\left\|\vec{V} \wedge \vec{a}\right\|}$$

6) TYPES DE MOUVEMENT

Soit *M* un point en mouvement dans le repère *R*. $\overrightarrow{V_R}(M)$ et $\overrightarrow{a_R}(M)$ sont respectivement sa vitesse et son accélération.

M accélère lorsque l'intensité de sa vitesse augmente, décélère lorsque cette intensité diminue. Il est animé d'un mouvement rectiligne uniforme si son accélération est nulle, autrement dit si son vecteur vitesse reste constant. Il décrit un mouvement circulaire uniforme si la composante tangentielle de son accélération est nulle.

Calculons le produit scalaire entre la vitesse et l'accélération

$$\vec{V}\cdot\vec{a} = \vec{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dV^2}{dt}$$

On remarque que le signe du produit scalaire détermine la nature du mouvement. En effet

$\vec{V}\cdot\vec{a}$	*V*	*Nature du mouvement*
0	*cste*	Uniforme
> 0	croit	Accéléré
< 0	décroit	Retardé



6.1) MOUVEMENT RECTILIGNE

C'est un mouvement dont la trajectoire est une droite. D'où la courbure $\gamma = \dfrac{1}{R}$ est nulle.

L'accélération est donc portée par la trajectoire : $\overrightarrow{a_R}(M) = \vec{a}_t = \dfrac{dV}{dt}\vec{T} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$

O M $\vec{a}$ x

Si *a=0* le mouvement est rectiligne uniforme

$$\frac{dx}{dt} = cste = V_0 \quad \Rightarrow \quad x = V_0 t + x_0$$

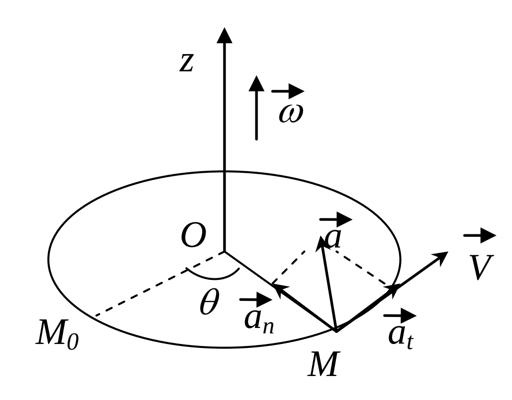
Si $a = cste = a_0$ le mouvement est rectiligne uniformément varié, on a

$$\frac{dx}{dt} = a_0 t + V_0$$
$$x = \frac{1}{2}a_0 t^2 + V_0 t + x_0$$

Si $\vec{V}\cdot\vec{a} > 0$, le mouvement est uniformément accéléré.
Si $\vec{V}\cdot\vec{a} < 0$, le mouvement est uniformément retardé.

6.2) MOUVEMENT CIRCULAIRE

C'est un mouvement dont le support de la trajectoire est inclut dans un cercle de rayon *R*, l'abscisse curviligne est alors définie par l'angle au centre θ. $s=R\theta$ et $ds=Rd\theta$.



La vitesse de *M* est portée par la tangente :

$$\vec{V} = V\vec{T} = \frac{ds}{dt}\vec{T} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{T} = R\dot{\theta}\vec{T}$$

On introduit la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$ de sorte que : $\vec{V} = R\omega\vec{T}$.
$\vec{\omega}$ étant perpendiculaire au plan $(\vec{T},\vec{N})$:

$$\vec{V} = R\omega\vec{T} = R\omega\vec{N}\wedge\vec{k} = R\vec{N}\wedge\omega\vec{k} = R\vec{N}\wedge\vec{\omega} = \overrightarrow{MO}\wedge\vec{\omega}$$

ou encore :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

L'accélération est obtenue par dérivation par rapport au temps de la vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{\theta}\vec{k} \wedge \left(-R\vec{N}\right) + \dot{\theta}\vec{k} \wedge \left(R\dot{\theta}\vec{T}\right) = R\ddot{\theta}\vec{T} + R\dot{\theta}^2\vec{N}$$

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} = R\ddot{\theta}\vec{T} + \frac{V^2}{R}\vec{N}$$

$\overrightarrow{a_n}$ est appelée accélération centripète.

Le mouvement circulaire est uniforme si V reste constante, autrement dit la composante tangentielle de son accélération est nulle.

6.3) MOUVEMENT HELICOIDAL

C'est un mouvement tel que :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\theta \end{cases}$$

On coordonnées cylindriques, on peut écrire :

$$\begin{cases} \rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{z} = h\dot{\theta} = h\omega \end{cases}$$

Calculons la vitesse du point *M(x,y,z)* à partir de l'expression $\overrightarrow{OP} = R\overrightarrow{e_\rho} + h\theta\overrightarrow{e_z}$

$$\vec{V} = R\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + h\omega\overrightarrow{e_z}$$

Or $\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_\rho}$ (voir TD), alors la vitesse peux s'écrire $\vec{V} = R\omega\overrightarrow{e_\varphi} + h\omega\overrightarrow{e_z}$

Son module sera donnée par :

$$V^2 = \omega^2\left(R^2 + h^2\right).$$

A présent on peut calculer l'accélération

$$\vec{a} = R\dot{\omega}\overrightarrow{e_\varphi} + R\omega\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} + h\dot{\omega}\overrightarrow{e_z} = R\dot{\omega}\overrightarrow{e_\varphi} + R\omega\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_\varphi} + h\dot{\omega}\overrightarrow{e_z}$$

Ainsi on a :

$$\vec{a} = R\dot{\omega}\overrightarrow{e_\varphi} - R\omega^2\overrightarrow{e_\rho} + h\dot{\omega}\overrightarrow{e_z}$$

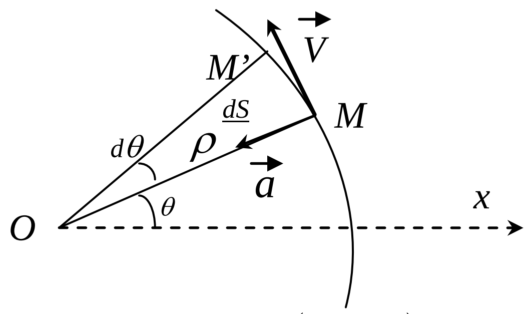
Son module s'exprime sous la forme suivante :

$$a^2 = \dot{\omega}^2\left(R^2 + h^2\right) + R^2\omega^4$$

6.4) MOUVEMENT A ACCELERATION CENTRALE

Le mouvement d'un point *M* est dit à accélération centrale par rapport à un repère *R*, s'il existe un point fixe *O* dans *R* tel que l'accélération $\vec{a}$ soit dirigée vers *O*.





On aura donc en coordonnées polaires $\rho = OM$, $\theta(Ox, OM)$. On peut construire le produit vectoriel $\vec{A}$ des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}$: $\vec{A} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}$. C'est le moment de la vitesse par rapport au point *O*. Calculons sa dérivée par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{V} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0}$$

Car l'accélération $\vec{a}$ est $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires. On en déduit que $\vec{A}$ est fixe. Comme par définition la produit vectoriel est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{V}$ et $\overrightarrow{OM}$, alors le plan contenant la trajectoire et la vitesse est un plan fixe. *Donc la trajectoire d'un mouvement à accélération centrale est une trajectoire plane.*

On se place donc dans le plan *Oxy* et en coordonnées cylindriques (voir TD) :

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\varphi} + \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}$$

Mais *z=0* donc $\ddot{z} = 0$. Et $\vec{a}$ passe par *O*, ce qui entraîne que la composante de l'accélération suivant $\overrightarrow{e_\varphi}$ est nulle, d'où on a :

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_\rho}$$

$$2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right) = 0$$

On déduit une relation fondamentale dans un mouvement à accélération centrale, à savoir :

$$\rho^2\dot{\theta} = C$$

C est appelée constante des aires

6.4.1) LOI DES AIRES

L'air balayée par le rayon vecteur est donné par $dS = \frac{1}{2}\rho\,\rho\,d\theta$ (c'est presque la *surface du triangle* ***OMM'***) ce qui permet de trouver la vitesse aréolaire :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}C$$

Ce qui donne après intégration

$$S = \frac{1}{2}Ct + S_0$$

Dans un mouvement à accélération centrale l'aire balayée par le rayon vecteur est proportionnelle au temps, c'est la loi des aires.

6.4.2) FORMULES DE BINET

Elles donnent les modules de la vitesse et de l'accélération du point *M*. on sait que

$$V^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2$$

Tenant compte de la relation $\rho^2\dot{\theta} = C$ et en introduisant la variable $u = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \frac{\dot{\theta}}{u^2} = C$, on obtient la première formule de Binet

$$V^2 = C^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]$$

Le module de l'accélération centrale est $a = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$, en procédant de la même façon, on trouve la deuxième formule de Binet

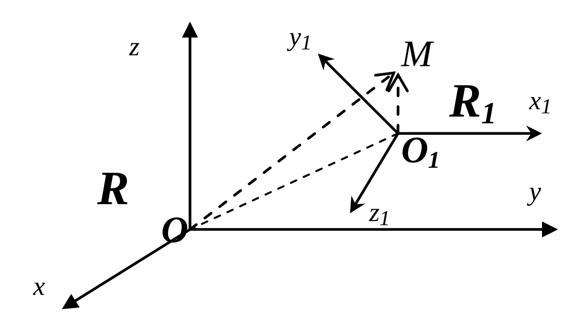
$$a = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

6.5) CHANGEMENT DE REPERE

Considérons deux référentiels :

R : $Oxyz$ supposé fixe (absolu) et

R_1 : $O_1x_1y_1z_1$ en mouvement par rapport à R (relatif).



6.5.1) DEFINTION DU POINT COINCIDANT

On appelle point coïncidant le point M_c, *fixe dans le référentiel R'*, qui coïncide avec le point M extrémité du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à l'instant t de la mesure.

VITESSE (RESPECTIVEMENT ACCELERATION) D'ENTRAINEMENT :

On appelle vitesse (resp. accélération) d'entrainement $\overrightarrow{V_e}^R$ (resp. $\overrightarrow{a_e}^R$) la dérivée première (resp. seconde) par rapport au temps, relativement au référentiel R, du vecteur position $\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{V_e}^R = \left.\frac{d\overrightarrow{OM_C}}{dt}\right|_R \qquad ; \qquad \overrightarrow{a_e}^R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM_C}}{dt^2}\right|_R$$

6.5.2) COMPOSITION DES VITESSES

Les vitesses de M mesurées dans les référentiels R et R_1 sont lié par la loi de compositions des vitesses. On sait que les vecteurs positions dans R et R_1 peuvent s'écrire

$$\overrightarrow{OM}\Big|_R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\overrightarrow{O_1M}\Big|_{R_1} = x_1\vec{i_1} + y_1\vec{j_1} + z_1\vec{k_1}$$

Ce qui permet de trouver les vitesses de M dans les référentiels R et R_1.

$$\overrightarrow{V_R}(M) = \overrightarrow{V_a}(M) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$
$$\overrightarrow{V_{R_1}}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) = \dot{x}_1\vec{i_1} + \dot{y}_1\vec{j_1} + \dot{z}_1\vec{k_1}$$

Pour trouver la loi de composition des vitesses il suffit de dériver dans R et par rapport au temps le vecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$:

$$\overrightarrow{V_R}(M) = \overrightarrow{V_R}(O_1) + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\Big|_R$$

Or on a

$$\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\Big|_R = \overrightarrow{V_{R_1}}(M) + x_1\frac{d\vec{i_1}}{dt}\Big|_R + y_1\frac{d\vec{j_1}}{dt}\Big|_R + z_1\frac{d\vec{k_1}}{dt}\Big|_R$$

Soit : $\vec{\omega}(R_1/R)$ le vecteur rotation instantané de R_1 par rapport à R. alors on a (voir TD) :

$$\frac{d\vec{i_1}}{dt}\Big|_R = \vec{\omega}(R_1/R)\wedge\vec{i_1}$$
$$\frac{d\vec{j_1}}{dt}\Big|_R = \vec{\omega}(R_1/R)\wedge\vec{j_1}$$
$$\frac{d\vec{k_1}}{dt}\Big|_R = \vec{\omega}(R_1/R)\wedge\vec{k_1}$$

d'où

$$\overrightarrow{V_R}(M) = \overrightarrow{V_R}(O_1) + \overrightarrow{V_{R_1}}(M) + \vec{\omega}(R_1/R)\wedge\overrightarrow{O_1M}$$

$\overrightarrow{V_e}^R(M) = \overrightarrow{V_R}(O_1) + \vec{\omega}(R_1/R)\wedge\overrightarrow{O_1M}$ représente la vitesse du mouvement d'entrainement de R_1 par rapport à R. Le mouvement d'entrainement résulte :

d'une translation du centre O_1, par rapport à R, de vitesse $\overrightarrow{V_R}(O_1)$,

d'une rotation de R_1 par rapport à R, de vecteur rotation $\vec{\omega}(R_1/R)$. On définitive on a :

$$\overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \overrightarrow{V_e}^R$$

6.5.3) DERIVATION CINEMATIQUE

Soit le vecteur $\vec{A}$ de coordonnées (x,y,z) dans le repère R et (x_1,y_1,z_1) dans R_1.

$$\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i_1} + y_1\vec{j_1} + z_1\vec{k_1}$$

La dérivée du vecteur $\vec{A}$ exprimé dans R par rapport au temps, relativement à R est donnée par

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_R = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Et la dérivée du même vecteur exprimé cette fois dans R_1 par rapport au temps, relativement à R_1 est donnée par

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R1} = \dot{x}_1\vec{i_1} + \dot{y}_1\vec{j_1} + \dot{z}_1\vec{k_1}$$

Dérivons à présent le vecteur $\vec{A}$ exprimé dans R_1 par rapport au temps, relativement à R.

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_R = \dot{x}_1\vec{i_1} + \dot{y}_1\vec{j_1} + \dot{z}_1\vec{k_1} + x_1\left.\frac{d\vec{i_1}}{dt}\right|_R + y_1\left.\frac{d\vec{j_1}}{dt}\right|_R + z_1\left.\frac{d\vec{k_1}}{dt}\right|_R$$

Or les dérivées des vecteurs $\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}$ par rapport à R sont données par

$$\left.\frac{d\vec{i_1}}{dt}\right|_R = \vec{\omega}(R_1/R)\wedge\vec{i_1}, \quad \left.\frac{d\vec{j_1}}{dt}\right|_R = \vec{\omega}(R_1/R)\wedge\vec{j_1} \quad et \quad \left.\frac{d\vec{k_1}}{dt}\right|_R = \vec{\omega}(R_1/R)\wedge\vec{k_1}$$

On déduit que

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega}(R_1/R)\wedge\vec{A}$$

Retenons que le terme complémentaire provient de la modification de la direction des vecteurs unitaires de la base de R_1 du fait du mouvement de rotation de R_1 par rapport à R.

6.5.4) COMPOSITION DES ACCELERATIONS

Cette loi est obtenue en dérivant $\vec{V}_R(M)$ dans l'équation traduisant la loi de composition des vitesses, on trouve donc

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a_e}^R + \vec{a_C}$$

Où le vecteur accélération absolu est donné par

$$\vec{a_a}(M) = \vec{a_R}(M) = \left.\frac{d\vec{V_R}(M)}{dt}\right|_R$$

le vecteur accélération relative s'écrit comme suit

$$\vec{a_r}(M) = \vec{a_{R_1}}(M) = \left.\frac{d\vec{V_{R_1}}(M)}{dt}\right|_{R_1}$$

le vecteur accélération d'entrainement est défini par

$$\vec{a_e}^R = \vec{a}_R(O_1) + \left.\frac{d\vec{\omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}(R_1/R)\wedge\left(\vec{\omega}(R_1/R)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)$$

Et le vecteur accélération complémentaire (ou de Coriolis) est défini par

$$\overrightarrow{a_C} = 2\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_{R_1}(M)$$

N.B : Référentiel particulier

i) Si le mouvement de R_1 par rapport à R est un mouvement de translation rectiligne uniforme alors on aura :

$$\overrightarrow{a_e}^R = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{a_C} = \vec{0}$$

ii) Si le mouvement de R_1 par rapport à R est un mouvement de rotation uniforme alors on aura :

$$\vec{\omega}(R_1/R) = \overrightarrow{cte} \Rightarrow \left.\frac{d\vec{\omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R = \vec{0}, \text{ d'où}$$

$$\overrightarrow{a_e}^R = \omega^2(R_1/R)\overrightarrow{MH}$$

H est la projection de M sur l'axe de rotation. Exemple rotation de la terre.


ETUSUP.com


ETUSUP
.com